

Examen Geometrie afina an I

①

1. Fie $A_4 = (X, \vec{X}, \Phi)$ un spațiu afîn real de dimensiune 4
 2p raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$
 Fie punctele $B_1(0, -2, 2, 3)$, $B_2(1, 0, 1, 0)$, $B_3(-2, -1, 6, 8)$, $B_4(-1, 6, 7, 4)$
 Să se verifice că sistemul $\{B_i\}_{i=1,4}$ este afîn ~~indepen-~~
 dent și să se determine ponderile lui B_1 în raport
 cu $\{B_2, B_3, B_4\}$.

2. Într-un plan afîn real $A_2 = (X, \vec{X}, \Phi)$ raportat la un
 V. ext. 6 reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se consideră morfismul
 afîn $f: X \rightarrow X$ de ecuații :
$$\begin{cases} y^1 = 3x^1 - x^2 + 10 \\ y^2 = x^1 + x^2 + 6 \end{cases}$$

- 2p (i) Fie dreapta afină $d: x^1 - x^2 + 10 = 0$. Să se determine
 puncte dreptei d a căror imagine prin f sunt pe d .

- 2p (ii) Să se determine aplicația inversă f^{-1} despre care să se
 arate că este morfism afîn.

- 2p (iii) Să se determine dreapta afină d' ce conține punctul
 $P(-1, -1)$ și a cărei imagine prin f conține punctul P .

- 1.5 1p ③ (i) Să se scrie toate tipurile de ecuații ptr o dreaptă
 afină într-un spațiu afîn de dimensiune n .
 1.5 1p (ii) Să se studieze pozițiile relative a două drepte
 afine într-un spațiu afîn de dimensiune 3.

Examen Geometrie afină an I

(2)

Ex: 1 Fie $A_4 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afîn real de dim 4 raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.
 2p Fie $C_1(0, -2, 2, 1)$, $C_2(1, 0, -1, -1)$, $C_3(-1, -4, 5, 3)$, $C_4(2, 2, -4, -3)$.
 Să se verifice că $\{C_i\}_{i=1,4}$ este un sistem de puncte coliniare și să se determine raportul simplu $(C_2, C_4; C_3)$.

2. Într-un spațiu afîn real de dimensiune 3, $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideră planul π cu $\vec{\pi} = [\vec{u}_1 = (-1, 4, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, -1)]$ și dreapta d ce trece prin $M(0, 0, 0)$ și direcție $\vec{u} = (1, 3, 1)$ a.i. $\pi \cap d = \{A\}$. Fie proiecția p_π și simetria corespunzătoare $s_\pi = 2p_\pi - id_X$, $p_\pi: X \rightarrow d$ paralela cu π .

3p (i) Să se determine ecuațiile ptr p_π și s_π

3p (ii) Să se verifice $p_\pi^2 = p_\pi$, $s_\pi^2 = id_X$, $s_\pi p_\pi = p_\pi$

3. (i) Să se demonstreze că imaginea unui subspațiu afîn printr-un morfism afîn este subspațiu afîn.
 1p

1p (ii) Să se enunțe și să se schiteze demonstrația pentru teorema lui Pappus într-un spațiu afîn $A = (X, \vec{X}, \phi)$

Examen Geometrie afină an I

3

1. În spațiul afin real $A = (X, \vec{X}, \phi)$ se consideră familiile
 2p de puncte $\{P_i\}_{i=1,4}$ și $\{Q_i\}_{i=1,4}$ a.i. $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_4 P_3}$, $\overrightarrow{Q_1 Q_2} = \overrightarrow{Q_4 Q_3}$,

$P_i \neq Q_i$, $i=1,4$. Fie $\{R_i\}_{i=1,4}$ a.i. $(P_i, Q_i; R_i) = \lambda$, $i=1,4$

1p (i) Să se arate că $\overrightarrow{R_1 R_2} = \overrightarrow{R_4 R_3}$

1p (ii) Dacă f este o dilatare ^{omotecie} a.i. $f(P_i) = P'_i$, $f(Q_i) = Q'_i$,

$f(R_i) = R'_i$, $i=1,4$ și $O = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3$, $O' = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_3$,

$O'' = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_3$ să se determine $(O, O'; O'')$ și

$(f(O), f(O'); f(O'')) = ?$

6p 2. În spațiul afin real $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper
 cartezian $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideră planul

$\Pi: x^1 - 2x^2 - 4x^3 + 5 = 0$ și o dreaptă $d: \vec{u} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
 care trece prin $A(1, 1, 1)$

1p (i) Să se determine $\Pi \cap d$

2p (ii) Să se scrie ecuațiile proiecției $p: X \rightarrow d$ paralelă
 cu Π și a simetriei s corespunzătoare.

2p (iii) Să se verifice $p^2 = p$, $s^2 = p$, $s^2 = id_X$

1p (iv) Calculați $p(d) = ?$ și $p(\Pi) = ?$ (Interpretare geometrică)

2p 3. (i) Într-un spațiu afin $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ să se scrie toate tipurile
 1p de ecuații pentru un hiperplan afin.

1p (ii) Să se enunțe teorema lui Desargues și să se
 1p plece o schiță de demonstrație.

Examen Geometrie afină an I

(4)

1. Fie $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afîn real de dimensiune 3 raportat la un reper cartezian $R = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se consideră punctele $A_0(0, 1, 1)$, $A_1(-1, 3, 0)$, $A_2(0, 2, 2)$, $A_3(-2, 1, 0)$ din X .

2p (i) Să se verifice că punctele $\{A_i\}_{i=0,3}$ sunt afîn independente și să se determine coordonatele baricentrice ale punctului $P(7, 0, 11)$ în raport cu R .

1p (ii) Să se determine reperul cartezian R_c asociat reperului afîn $R_{af} = \{A_i\}_{i=0,3}$ și să se scrie matricea schimbării de reper $R \rightsquigarrow R_c$ în X .

2. Într-un plan afîn real $A_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la un reper cartezian $R = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se consideră morfismul afîn

$$f: X \rightarrow X \text{ de ecuații } \begin{cases} y' = 3x' + x'^2 - 6 \\ y^2 = x' + 3x'^2 + 9 \end{cases}$$

2p (i) Să se determine $\text{Fix } f = ?$

2p (ii) Să se scrie ecuațiile dreptelor care rămân invariante prin morfismul f .

3. (i) În spațiul afîn $A_2 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul $R_c = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se consideră dreptele $d_1: M_1(1, 1), \vec{u}_1 = (2, -3)$

Să se determine $p: X \rightarrow d_1$, $d_2: M_2(2, -2), \vec{u}_2 = (1, -1)$

proiecția paralelă cu d_2 și să se arate că este morfism afîn.

1p (ii) Să se arate că intersecția nevidă de subspații afîne este un subspațiu afîn.

Examen Geometrie afină an I

(5)

1. Fie A_4 un spațiu afin real de dimensiune 4 raportat la reperul cartezian $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ și punctele $A_0(-2, 0, 1, -2)$, $A_1(0, 1, -1, 0)$, $A_2(0, -2, -1, 0)$, $A_3(-1, 0, -2, -1)$, $A_4(0, -1, -2, -1)$.

(i) Să se determine ecuațiile dreptei $d: A_2, \overrightarrow{A_3 A_4}$.

(ii) Să se det. ec. hiperplanului $H = (A_1 A_2 A_3 A_4)$.

2. În spațiul afin real de dimensiune 3, $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul afin $R = \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideră morfismul afin $f: X \rightarrow X$ definit prin $f(\vec{e}_i) = A_i$, $i = \overline{0, 3}$ unde

$A_0(2, 4, 2)$, $A_1(1, 4, 4)$, $A_2(2, 3, 0)$, $A_3(2, 2, 1)$.

(i) Să se determine ec-le lui f .

(ii) $\text{Fix } f = ?$

(iii) Pentru $P(-1, 0, 1)$ să se determine $t_{\vec{u}}, g_P$ a.c.

$$f = t_{\vec{u}} \circ g_P$$

3. (i) Să se definească translația.

1.5

Să se arate că este morfism afin

Să se studieze compunerea a două translații.

(ii) Să se enunțe teorema lui Desargues și să se dea o schiță de demonstrație.

1. Considerăm spațiul afîn real de dimensiune 3 raportat la un reper cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

(i) Să se studieze poziția relativă a dreptelor d_1, d_2 și să se determine un plan care le conține.

$$d_1: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1} \quad d_2: \frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1/2}$$

(ii) Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ a.c. d_1, d_2 să fie paralele, concurente. Să se studieze dacă pot fi paralele.

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda} \quad , \quad d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

2. Într-un spațiu afîn real de dimensiune 3, $\mathcal{A}_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se consideră dreapta d și planul π a.c. $d \cap \pi = \{A\}$.

(i) Să se determine ecuațiile proiecției $p_\pi: X \rightarrow d$ paralelă cu π și a simetriei corespunzătoare p_π^2

$$d: M(0,0,0), \vec{d} = (1,3,1), \quad \pi: \vec{a} = (-1,-1,0), \vec{e} = (1,0,-1)$$

(ii) Să se verifice $p_\pi^2 = p_\pi$ și $p_\pi^2 = id_X$

3. (i) Să se definească omotetia de centru P și raport λ , să se arate că este morfism afîn și să se studieze compunerea a două omotetii de același centru.

(ii) Fie f un morfism afîn cu $\vec{f}$ aplicația liniară asociată. Să se arate că dacă f este injectivă at $\vec{f}$ este inj.

Examen Geometrie afină an I

Gr 2

7

2p 1. Fie A_3 un spațiu afîn real de dimensiune 3 raportat la un reper cartezian $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

1p (i) Să se scrie toate tipurile de ecuații pentru planul afîn paralel cu $\Pi_1: x^1 - 2x^2 + x^3 - 1 = 0$ și conține dreapta afînă $\frac{x^1+3}{1} = \frac{x^2-2}{1} = \frac{x^3-1}{1}$ (ec. vect. param., param., indel., prin 3 puncte)

1p (ii) Să se determine ecuațiile planului ce trece prin punctul $R_1(-1, 0, 1)$ și prin intersecția planelor afîne Π_1 și Π_2 ,
 $\Pi_1: x^1 - x^2 + x^3 + 1 = 0$, $\Pi_2: x^1 + x^2 - x^3 - 3 = 0$

5p 2. Fie $A_3 = (X, \vec{X}, \phi)$ un spațiu afîn real de dimensiune 3 raportat la reperul cartezian $R = \{0; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ și morfismul afîn $f: X \rightarrow X$ definit de ecuațiile:

$$\begin{cases} y^1 = 5x^1 + 2x^2 + 2x^3 - 2 \\ y^2 = -4x^1 - x^2 - 2x^3 + 2 \\ y^3 = 8x^1 + 4x^2 + 5x^3 - 4 \end{cases}$$

- 2p (i) Să se verifice că f este bijectiv și să se determine f^{-1}
1p (ii) Să se determine mulțimea punctelor fixe ptr f , $\text{Fix } f$.
1p (iii) Să se arate că $\overrightarrow{Pf(P)}$ este coliniar cu $\overrightarrow{Qf(Q)}$, $\forall P, Q \in X$
1p (iv) Să se arate că raportul simplu $(P', f(P); P)$ este constant unde P' este intersecția dintre dr $Pf(P)$ și $\text{Fix } f$.

3p 3. (i) Să se arate că intersecția ^{neviduă} de subspații af este subsp. afîn
1.5p (ii) Să se enunțe teorema lui Pappus și să se facă o schiță de demonstrație.
1.5p